Université de Strasbourg
Adriano Marmora, marmora@math.unistra.fr

Master 1 Semestre 1, 2026-2027
Feuille de TD

Algèbre I

Quelques exercices sur la localisation

Exercice 1
Soit A un anneau commutatif et unitaire et $S \subset A$ une partie multiplicative. Identifier l'anneau quotient $S^{-1}A$ dans les cas suivants :
a) $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $S = \{\overline{2}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
b) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $S = \{(0,1), (1,1)\}$
c) $A = \mathbb{C}[X]$ et $S = \mathbb{C}[X] - \{0\}$

Exercice 2
Soit A un anneau intègre et soit $P \subset A$ un idéal premier.
a) Montrer que $A - P$ est une partie multiplicative de A, qu'on notera S.
b) Montrer que l'application $\iota_S : A \to S^{-1}A,\ a \mapsto \frac{a}{1}$ est injective.
c) Montrer que $\{\frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in P\}$ est un idéal maximal de $S^{-1}A$.
d) Montrer que l'anneau $S^{-1}A$ ne contient pas d'autres idéaux maximaux.

Exercice 3
Soit p un nombre premier et $(p) \subset \mathbb{Z}$ l'idéal engendré par p, soit $S_1 = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $S_2 = \mathbb{Z} - (p)$. L'anneau $S_1^{-1}\mathbb{Z}$ est souvent désigné $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ et l'anneau $S_2^{-1}\mathbb{Z}$ souvent $\mathbb{Z}_{(p)}$.
a) Identifier $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ et $\mathbb{Z}_{(p)}$ avec des sous-anneaux concrets de $\mathbb{Q}$.
b) Quels sont les éléments inversibles dans ces deux sous-anneaux ?

Exercice 4
Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. On rappelle qu'on note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A.
a) Relier $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ à $\mathrm{Spec}(A)$ (prouver la proposition énoncée en cours).
b) Soit $f \in A$. Relier $\mathrm{Spec}(A[\frac{1}{f}])$ à $\mathrm{Spec}(A)$.
c) Montrer que $A_f = 0$ si, et seulement si, f est nilpotent.
d) En déduire que le nilradical de A est égal à l'intersection des idéaux premiers de A. (Attention : à un moment il faudra utiliser le lemme de Zorn !)
e) Soit I un idéal de A. Montrer que son radical est égal à l'intersection des idéaux premiers de A le contenant.